



Evaluación de Tecnología con TOPSIS en Presencia de Multicolinealidad en Atributos

Jorge Luis García Alcaraz¹ Nancy Angélica Coronel González²

Departamento de Ingeniería Industrial - Instituto de Ingeniería y Tecnología

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Av. Del Charro 450. Col. Universidad. Ciudad Juárez, Chihuahua, México

Tel: (+52 656) 688 – 44843.

e-mail: jorge.garcia@uacj.mx

Resumen— En este artículo se presenta una propuesta de mejoramiento a la técnica TOPSIS, la cual usa la distancia euclidiana que tiene una alternativa en evaluación a una alternativa ideal y otra anti-ideal al ser consideradas como puntos en el espacio euclidiano, misma que asume independencia lineal entre los atributos, lo cual frecuentemente no se cumple. Se demuestra matemáticamente que la distancia de Mahalanobis integra el coeficiente de correlación, el cual es una medida de la dependencia lineal y además, se presenta un caso de estudio en el que se realizan evaluaciones con ambas distancias, encontrándose inconsistencia en las soluciones propuestas.

Palabras claves— Justificación multiatributos, inversión en TMA, evaluación de robots, TOPSIS, técnicas multicriterio.

1. Introducción

El nivel creciente de competitividad que se maneja en el mundo globalizado de nuestros días está obligando a las empresas manufactureras a considerar inversiones en Tecnologías para la Manufactura Avanzada (TMA), dado que éstas permiten lograr calidad y precios competitivos en los productos. Además, es ampliamente aceptado que las inversiones en TMA no solo ofrecen beneficios operativos y económicos, sino que también proporcionan ventajas competitivas y estratégicas que pueden ser aprovechadas por las empresas que las implantan (Parkan y Wu, 1998). Sin embargo, las empresas que deciden invertir en TMA se enfrentan a un problema de decisión al momento de elegir la alternativa que cumpla con las características deseadas. Estas características comprenden atributos tales como el precio, calidad de producto, capacidad de producción, grado de precisión, ciclo de vida, servicios por parte del proveedor, entre otros. Para este caso de estudio estas características propias de las TMA se consideran atributos y pueden ser cualitativos y cuantitativos (Hofmann y Orr, 2005; Lefley *et al.* 2004; MacDougall y Pike, 2003). Ante esta necesidad de evaluación de TMA que tienen las empresas con la finalidad de elegir una alternativa que satisfaga sus requerimientos y a su vez justifique la inversión de grandes sumas económicas, se han creado muchas técnicas, modelos y metodologías. Las técnicas de evaluación de proyectos tecnológicos pueden agruparse en tres principales grupos, las cuales son: Estratégicas, Económicas y Analíticas (Small y Chen, 1997).

Las técnicas estratégicas tienen una amplia relación con la misión y visión de la empresa, mismas que son ampliamente usadas por la alta gerencia y es probable que sean poco aceptadas por los mandos medios y bajos de la

¹ Jorge Luis García Alcaraz Dr es Profesor Investigador de Ingeniería Industrial en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez en Ciudad Juárez, Chihuahua, México. jorge.garcia@uacj.mx (autor corresponsal)

² Nancy Angélica Coronel González es Profesora por honorarios en el Departamento de Ingeniería Industrial en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez y candidata al grado de Doctora en Ciencias en Administración por la Universidad Nacional Autónoma de México.



organización. Por su parte, las técnicas económicas, tienen un enfoque totalmente financiero y no integran atributos cualitativos en sus procesos de evaluación, enfocándose en aquellos que se pueden representar en unidades monetarias; algunas de las técnicas clasificadas dentro de esta categoría son el valor presente neto (VPN), tasa interna de retorno (TIR) y periodo de retorno (PR), entre otras. Las técnicas de tipo analíticas se caracterizan por poder integrar en la evaluación a los atributos cualitativos y cuantitativos, mismas que son ampliamente aceptadas por muchos investigadores, además de que tienen un enfoque multicriterio y multiatributos.

La integración de los atributos cualitativos y cuantitativos garantiza el éxito del proceso de implantación de la tecnología. Por ejemplo, se considera que si no se integran estos dos tipos de atributos en el análisis, entonces se presentan problemas en la implementación y existe el riesgo de un fracaso de la inversión (Yusuff y Hashmib, 2001; Ahn y Park, 2008; Hajkowicz y Higgins, 2008). Las técnicas analíticas incorporan estos aspectos por lo que son más complejas que las técnicas económicas; además, debido a sus contenidos amplios, se analiza mayor información, incluida la incertidumbre y sus efectos, por lo que son más realistas, lo que las vuelve más apreciadas para el análisis de decisiones de inversión en TMA (Meredith y Suresh, 1986; Adler, 2000; Wiecek *et al.*, 2008).

Una de las técnicas analíticas para la evaluación multicriterio y multiatributo en la toma de decisiones es denominada TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution*). Esta técnica está basada en el concepto intuitivo de que la alternativa seleccionada debe tener la distancia Euclidiana más corta posible a una solución ideal y estar lo más lejos posible respecto a otra solución anti-ideal, cuando dichas alternativas son consideradas como vectores en un espacio n-dimensional (Hwang y Yoon, 1985; Lai, 1994; Hwang y Yoon, 1995; Lai *et al.*, 1995). Así, puede ocurrir que una alternativa seleccionada desde el punto de vista de su distancia euclidiana más corta respecto a la solución ideal, deba competir con otra alternativa que se encuentra lo más lejos posible de la solución anti-ideal. Por ello, y a fin de definir la solución ideal, la técnica TOPSIS define un índice de similitud (o de proximidad relativa) que se construye combinando la proximidad al ideal y la lejanía respecto al anti-ideal.

Las aplicaciones de TOPSIS corresponden a varias áreas en las que se debe elegir una alternativa de un conjunto de éstas. Como ejemplos podemos citar que se ha hecho uso de esta técnica en el procesos de selección y administración de recursos humanos (Chen y Tzeng, 2004), se ha empleado en selección de sistemas de transporte (Janic, 2001), se ha usado en la selección de diseños y prototipos (Kwong y Tam, 2002), se ha empleado en procesos de manufactura (Milani *et al.*, 2005), lo han usado en administración de sistemas de distribución de agua (Srdjevic *et al.*, 2004), lo han empleado en simulación de respuestas múltiples en procesos estocásticos y control de calidad (Yang y Chou, 2005), y se ha empleado para determinar la mejor localización de una planta industrial (Yoon y Hwang, 1985).

Las aplicaciones específicas de TOPSIS en la manufactura también son ampliamente reportadas en la literatura. Por ejemplo, se ha usado esta técnica en la selección de procesos de producción (Rao, 2008), se ha propuesto una metodología basada en TOPSIS para la selección de materiales en un nuevo diseño (Rao y Davim, 2007), se ha propuesto un modelo para la selección de niveles ideales de inventario (Bhattacharya *et al.*, 2007), ha sido usada para selección de materiales que integran un diseño alternativo (Prabhakaran *et al.*, 2006), se ha empleado en la selección de la mejor localización de planta y además ha integrado aspectos de incertidumbre mediante lógica difusa (Deng, 2006). También se ha usado esta técnica para la selección de materiales con la mejor maquinabilidad (Rao, 2006) y se ha propuesto un modelo basado en TOPSIS para la selección del mejor prototipo rápido (Byun y Lee, 2005). Otros han integrado secuencias de actividades y han propuesto una metodología para seleccionar robots de ensamble en una empresa automotriz (Ghrayeb *et al.*, 2004). Otros han usado TOPSIS para la selección de procesos de manufactura no tradicionales (Yurdakul y Çogun, 2003; Parkan y Wu, 1998).

Cada uno de los casos mencionados anteriormente hacen uso de la técnica TOPSIS tradicional, la cual hace uso de la distancia Euclidiana pero tiene una serie de supuestos, tales como la independencia entre los atributos y la carencia de correlación entre los mismos. Estos supuestos son violados frecuentemente y entonces las evaluaciones realizadas en presencia de multicolinealidad y altos índices de correlación entre los atributos pueden llevar a tomar decisiones erróneas. Para resolver este problema, en este artículo se propone una modificación a la técnica TOPSIS y se demuestra matemáticamente que se debe usar la distancia de Mahalanobis en lugar de la distancia euclidiana en presencia de colinealidad entre los atributos, ya que ésta sí integra el índice de correlación que existe entre éstos, mismo que es una medida de la independencia.



2. Enfoque Matricial en Evaluación Multiatributos

El primer paso y quizás el más importante en un proceso de decisión, es determinar los atributos que serán usados como base en el proceso de selección. Los atributos representan las características que serán evaluadas en cada una de las alternativas. De manera general, supóngase que existen K Tecnologías para la Manufactura Avanzada (TMA) y que la mejor de éstas debe ser seleccionada. Las alternativas se denotan por A_1, A_2, \dots, A_k en lo sucesivo en este trabajo. Sin embargo, en evaluación multiatributos se integran dos tipos de atributos, cualitativos (subjetivos) y cuantitativos (objetivos), mismos que se definen más ampliamente a continuación.

NOTA DE EDICION: Estandarizar las variables y ecuaciones. O todas con letra inclinada o todas con letra normal. Aquí en los párrafos están normal pero en las ecuaciones y matrices están con letra acostada.

De manera genérica, supóngase que J atributos objetivos y L atributos subjetivos se han identificado en relación con el problema de selección de tecnología. Los J atributos subjetivos son denotados por X_1, X_2, \dots, X_J , y los L atributos subjetivos son denotados por $X_{J+1}, X_{J+2}, \dots, X_{J+L}$. Los valores de los atributos objetivos para el proceso de selección son generalmente proporcionados por el constructor de la TMA y se refieren a aspectos relacionados con costos e ingeniería. En este trabajo se representan esos valores en una matriz de valores objetivos (VO). Esta matriz se representa en la ecuación (1).

Los valores de los atributos subjetivos para la selección del proceso o TMA son obtenidos por calificaciones de expertos y es muy frecuente que existan discrepancias entre éstos. Estos atributos no son fácilmente cuantificables y generalmente se representan por promedios de los juicios emitidos por los expertos en una escala similar. Sin embargo, al realizar promedios para representar a los datos de las alternativas, se corre el riesgo de incorporar opiniones de personas que tengan discrepancias muy altas con el resto. Para evitar esto, frecuentemente se omiten los valores extremos de las opiniones de los expertos. Además, existen muchas otras técnicas que ayudan a obtener valoraciones para este tipo de atributos, tales como la lógica difusa.

$$VO = \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A^k \end{matrix} \begin{bmatrix} X^1_1 & X^1_2 & \cdot & \cdot & X^1_J \\ X^2_1 & X^2_2 & \cdot & \cdot & X^2_J \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^k_1 & X^k_2 & \cdot & \cdot & X^k_J \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde X^k_j es el valor de la variable X_j para el proceso o TMA A^k para $k=1 \dots K$ y $j=1, \dots, J$.

De manera genérica, supóngase que P expertos o gerentes de los departamentos de la empresa son invitados a calificar la TMA con respecto a cada uno de los atributos subjetivos en la k alternativas, los cuales forman un comité multidisciplinario. Se sugiere que los expertos califiquen mediante su juicio sobre la presencia del atributo en la alternativa mediante un número entero entre 1 y 9, esquema en que el 1 representa la más baja calificación para un atributo y el 9 indica la mejor (Parkan y Wu, 1998). Esta escala se sugiere por su alta facilidad de manejo y ha sido empleada por otros investigadores (Saaty, 2007). Sin embargo, puede usarse cualquier otra escala de medición, como la 1-10, la 1-100, etc. Una matriz de valores subjetivos (VS) es construida por cada uno de los P expertos, tal como se indica en la ecuación (2).

Las P matrices VS^p que proveen los P expertos se suman término a término, generando una matriz total, en la cual se divide cada uno de sus elementos por el valor P (número de expertos), obteniéndose de esta manera una media aritmética, la cual representa el juicio promedio. Se asume que los P expertos son racionales en su juicio. Así la matriz de valores subjetivos total, denominada VST , se determina mediante la ecuación (3).

$$VS^p = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_K \end{matrix} \begin{bmatrix} X^{1p}_{J+1} & X^{1p}_{J+2} & \cdot & \cdot & X^{1p}_{J+L} \\ X^{2p}_{J+1} & X^{2p}_{J+2} & \cdot & \cdot & X^{2p}_{J+L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{Kp}_{J+1} & X^{Kp}_{J+2} & \cdot & \cdot & X^{Kp}_{J+L} \end{bmatrix} \quad (2)$$



$$VST = \sum_{p=1}^P VS^p / P = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_K \end{matrix} \begin{bmatrix} X^1_{J+1} & X^1_{J+2} & \cdot & \cdot & X^1_{J+L} \\ X^2_{J+1} & X^2_{J+2} & \cdot & \cdot & X^2_{J+L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X^K_{J+1} & X^K_{J+2} & \cdot & \cdot & X^K_{J+L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $x^k_{J+i} = \frac{\sum_{p=1}^P x^{kp}_{J+L}}{P}$ para $k=1, \dots, K, l=1, \dots, L$ es la calificación promedio de los P expertos para la alternativa A^k con respecto al atributo subjetivo X_{J+i} .

Combinando la matriz de valores objetivos y la de valores subjetivos, se construye la matriz de decisión final (MDF) para el problema del proceso de decisión, tal como se señala en la ecuación (4). Esta matriz de decisión final sirve de base para el análisis mediante cualquiera de las técnicas multicriterio existentes, entre ellas TOPSIS, y dado que la propuesta de mejora es sobre esta técnica, entonces se describe a continuación.

3. Técnica TOPSIS

La técnica TOPSIS parte del supuesto intuitivo de que las alternativas en evaluación pueden ser representadas por puntos en un espacio euclidiano n-dimensional; así, se seleccionaría aquella que tiene la menor distancia a un alternativa ideal, pero la mayor a otra denominada anti-ideal, las cuales se conforman con los mejores y peores valores nominales en los atributos.

$$MDF = [VO, VST] = \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A^K \end{matrix} \begin{bmatrix} x^1_1 & \dots & x^1_J & x^1_{J+1} & \dots & x^1_{J+L} \\ x^2_1 & \dots & x^2_J & x^2_{J+1} & \dots & x^2_{J+L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^K_1 & \dots & x^K_J & x^K_{J+1} & \dots & x^K_{J+L} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Así, dado que una alternativa A^k se considera como un vector en el espacio euclidiano, ésta puede ser representada de acuerdo a la ecuación (5). Así mismo, como a cada alternativa le corresponde un punto en el espacio n-dimensional (ya que existe n atributos, $n=J+L$), similarmente, el atributo x-ésimo puede ser analizado como un vector en el espacio k-dimensional dado por la ecuación (6).

$$A^k = (x^k_1, \dots, x^k_n) \text{ para } k=1, 2, \dots, k \quad (5)$$

$$X_n = (x^1_n, \dots, x^k_n) \text{ para } n=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

De la misma manera, la técnica TOPSIS parte del supuesto de que existe una alternativa que debe ser mejor o peor a todas las demás. Así, a la alternativa con las mejores características nominales en los atributos, se le llama solución o alternativa ideal y está dada por la ecuación (7). Similarmente, se genera la solución o alternativa anti-ideal, la cual está compuesta por todos los valores nominales no deseados de los atributos dentro de las alternativas y puede ser representada por la ecuación (8).

$$A^+ = (x^+_1, x^+_2, \dots, x^+_n) \quad (7)$$

$$A^- = (x^-_1, x^-_2, \dots, x^-_n) \quad (8)$$

3.1 Metodología TOPSIS

La metodología de trabajo de TOPSIS se describe a continuación:



- 1 Normalizar cada vector X_n de los atributos que son sujetos a evaluación y convertirlos a TX_n , según la ecuación (9). Esta operación se realiza porque es posible que los atributos en evaluación se encuentren expresados en diferentes escalas de medición; por ejemplo, el costo está expresado en unidades monetarias, la velocidad en unidades de longitud por unidades de tiempo, etc.

$$TX_n = \frac{X_n}{\|X_n\|} = \left(\frac{x_n^1}{\|X_n\|}, \dots, \frac{x_n^k}{\|X_n\|} \right) \quad (9)$$

donde $\|X_n\|$ representa la norma euclidiana del vector del atributo (magnitud del vector). Así, mediante esta operación todos los atributos estarán sin dimensión alguna y se podrán realizar comparaciones entre alternativas. $\|X_n\|$ puede ser obtenida según la ecuación (10).

$$\|X_n\| = \sqrt{\sum_1^x x_i^2} \quad (10)$$

Una manera de representar la normalización de los elementos componentes de las alternativas en evaluación, la alternativa ideal e anti-ideal, es de acuerdo a las ecuaciones (11), (12) y (13).

$$TA^k = (t_1^k, \dots, t_n^k) = \left(\frac{x_1^k}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^k}{\|X_n\|} \right) \quad (11)$$

$$TA^+ = (t_1^+, \dots, t_n^+) = \left(\frac{x_1^+}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^+}{\|X_n\|} \right) \quad (12)$$

$$TA^- = (t_1^-, \dots, t_n^-) = \left(\frac{x_1^-}{\|X_1\|}, \dots, \frac{x_n^-}{\|X_n\|} \right) \quad (13)$$

- 2 Calcular, según las ecuaciones (14) y (15), las distancias euclidianas que existen de los puntos representados por cada alternativa, y los puntos que representan a la alternativa ideal y la alternativa anti-ideal.

$$\rho(A^k, A^+) = |w^*(TA^k - TA^+)| = \sqrt{\sum_{n=1}^N w_n^* (t_1^k, \dots, t_n^+)^2} \quad (14)$$

$$\rho(A^k, A^-) = |w^*(TA^k - TA^-)| = \sqrt{\sum_{n=1}^N w_n^* (t_1^k, \dots, t_n^-)^2} \quad (15)$$

Donde w representa la ponderación o peso que los expertos han proporcionado al atributo en evaluación.

- 3 Ordenar las alternativas de acuerdo a la cercanía y lejanía de los puntos de cada alternativa a los puntos de la solución ideal e anti-ideal, las que están dadas por la ecuación (16).

$$RC(A^+, A^-) = \frac{\rho(A^k, A^+)}{\rho(A^k, A^+) + \rho(A^k, A^-)} \quad (16)$$

El criterio de selección que se usa en TOPSIS, consiste en elegir una alternativa que contenga el valor $RC(A^k, A^+)$ menor que todas las demás.

4. Conceptos Relacionados con TOPSIS

La técnica TOPSIS involucra varios conceptos que son analizados con mayor profundidad en los siguientes párrafos con la finalidad de justificar de una mejor manera la integración de la distancia de Mahalanobis en la misma.

4.1 Distancia Euclidiana

La técnica TOPSIS utiliza la distancia euclidiana para medir las distancias entre los atributos (ideal y anti-ideal). Básicamente la fórmula de la distancia euclidiana se basa en la raíz cuadrada de la magnitud del vector diferencia



(vector que representa a una alternativa y la ideal e anti-ideal) al cuadrado, tal como se muestra en la ecuación (17) para el caso en que se tienen solamente dos atributos (Meloun y Militky, 2001; Kiang, 2003). Sin pérdida de generalidad se puede decir que la misma fórmula se aplica cuando se presentan J+L atributos en un conjunto de alternativas en evaluación.

$$d_E(x, y) \equiv \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (17)$$

4.2 Distancia de Mahalanobis

La utilidad de la distancia de Mahalanobis radica en que es una forma de determinar la similitud entre dos variables aleatorias multidimensionales. Es diferente de la distancia euclidiana debido a que ésta si considera la correlación entre las variables aleatorias, atributos en nuestro caso. Así, se tiene en cuenta la dispersión de las variables y su dependencia (Nocairi *et al.*, 2005; Meloun y Militky, 2001), la cual es medida por el coeficiente de correlación (Kovács *et al.* 2005; Hoyt *et al.* 2008). Formalmente, la distancia de Mahalanobis entre dos variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad \bar{x} y \bar{y} con matriz de covarianza Σ , la cual debe ser no singular para garantizar su existencia. La distancia de Mahalanobis se define según la ecuación (18) (Xiang *et al.*, 2008).

$$d_M(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \sqrt{(\bar{x} - \bar{y})^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \bar{y})} \quad (18)$$

4.3 Colinealidad y Correlación

El término colinealidad se refiere a una situación en la que dos o más variables explicativas están fuertemente interrelacionadas (atributos en este caso de estudio) y, por tanto, resulta difícil medir sus efectos individuales sobre una variable endógena. Existen muchas técnicas para la detección de la colinealidad entre un conjunto de variables o atributos, entre las que se pueden mencionar: la matriz de gráficos de dispersión, la matriz de correlación de las variables independiente, los factores de inflación de la varianza y los números de condición (Pasini, 1991; Lipovetsky y Conklin, 2001; Montgomery *et al.* 2004), mismos que se exponen brevemente a continuación.

4.3.1 Gráficos de Dispersión

En la matriz de gráficos de dispersión se grafica cada uno de los atributos contra los demás en forma matricial, lo que permite observar patrones de alineación o tendencias lineales, mismas que ayudan a determinar la colinealidad. Frecuentemente el atributo repetibilidad y costo de un robot tienen altos niveles de correlación, así como entre repetibilidad y velocidad; es decir, es posible que un robot con mayor precisión tenga un costo más elevado y que un robot lento tenga mejor precisión.

4.3.2 Matriz de Correlación

Otra forma sencilla de determinar la colinealidad de los atributos es mediante la matriz de correlación, la cual es cuadrada y el coeficiente de correlación puede tomar valores entre [-1, 1], por lo que valores cercanos a éstos indicarán una fuerte colinealidad. Lo ideal es que la matriz de correlación sea una matriz identidad, donde los valores de la diagonal sean unos y los valores fuera de ésta sean cero. Una situación como la anterior indicaría independencia entre los atributos (Johnson y Wichern, 1992).

4.3.3 Factores de Inflación de la Varianza (FIV)

Otra técnica frecuentemente usada para la determinación de la colinealidad es la determinación de los factores de inflación de la varianza (FIV), mismos que son estimados por la ecuación (19). Donde R_j^2 es el coeficiente de determinación del atributo j sobre los demás en una regresión lineal múltiple. Se recomienda que valores mayores a 10 en los FIV indiquen fuerte colinealidad en los datos (Liu *et al.*, 2003). En la actualidad muchos paquetes estadísticos pueden estimar esos FIV, tales como el NCSS.

$$FIV_j = \frac{1}{(1 - R_j^2)} \quad (19)$$



4.3.4 Números de Condición

Los números de condición se estiman mediante el análisis del eigensistema de la matriz $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ de los atributos evaluados en las alternativas. Para su estimación, se determinan los eigenvalores de esa matriz. Los números de condición para cada variable son la razón del eigenvalor perteneciente a la variable o atributo, entre el mínimo eigenvalor encontrado en todas las variables o atributos. Así, habrá un número de condición con valor de uno y otro que se refiera a la razón del máximo entre el mínimo, el cual es el máximo número de condición (Li *et al.* 2004). Si alguno de los números de condición es mayor que 1000, entonces se concluye que existe multicolinealidad. El máximo valor puede ser estimado por la ecuación (20).

$$\eta = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (20)$$

donde:

η = Número de condición

λ_{\max} = Máximo eigenvalor

λ_{\min} = Mínimo eigenvalor

5. Técnica Propuesta

La debilidad que se presenta en la técnica TOPSIS al utilizar la distancia euclidiana radica en la falta de integración de la colinealidad medida mediante la correlación, misma que es fácilmente detectada entre atributos como el costo y la velocidad o el costo y la precisión que ofrecen las alternativas, ya que éstos representan un fuerte grado de dependencia uno con respecto de otro. Sin embargo, en estos momentos cabe formular la cuestión de cómo integrar la correlación en TOPSIS. La respuesta es hacer uso de la distancia de Mahalanobis en lugar de la euclidiana, por lo que se procede a demostrar la equivalencia entre éstas.

5.1 Demostración

Como primer paso, para calcular la distancia de Mahalanobis, se estima la matriz de varianza- covarianzas C_x , la cual es estimada a partir de la ecuación (21), dado que ésta se requiere, según la ecuación (18).

$$C_x \equiv \frac{1}{(n-1)} (X_c)^T (X_c) \quad (21)$$

Donde:

n = número de alternativas en evaluación.

X_c = la matriz de datos centrados de las alternativas para todos los atributos. $X_{ci} = (X_i - \bar{X})$.

Como fin ilustrativo y por la sencillez de sus cálculos, esta demostración se realiza para el caso en que se evalúan dos atributos en un conjunto de alternativas; así, la matriz de varianza-covarianza es como se muestra en la ecuación (22) (Montgomery *et al.*, 2001).

$$C_x \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Donde:

σ_1^2 y σ_2^2 son las varianzas de los atributos respectivos de X_1 y X_2 .

$\sigma_1\sigma_2$ es la covarianza entre dos atributos.

ρ_{12} es el coeficiente de correlación entre los dos atributos.

Así, con la nueva simbología usada, la distancia de Mahalanobis a la ideal queda expresada según la ecuación (23) y según la ecuación (24) para la anti-ideal.

$$DM_i \equiv \sqrt{(x_i - x_+) C_x^{-1} (x_i - x_+)^T} \quad (23)$$



$$DM_i \equiv \sqrt{(x_i - x_-) C_x^{-1} (x_i - x_-)^T} \quad (24)$$

Donde:

x_i es el vector que representa a la alternativa en evaluación

x_+ es el vector que representa a la alternativa ideal

x_- es el vector que representa a la alternativa anti-ideal

C_x^{-1} es la matriz inversa de varianzas

$(x_i - x_+)$ es el vector diferencia entre la alternativa en evaluación y la ideal

Además, debe aclararse que C_x^{-1} debe ser no singular para garantizar su existencia y pueda ser usada en los cálculos en las ecuaciones (23) y (24).

La singularidad de la matriz de la ecuación (21) o (22) puede ser fácilmente probada mediante la estimación del determinante de ésta; si el determinante es cero, entonces la matriz inversa no existe, lo cual es fácilmente observado en la ecuación (25) donde se está obteniendo la inversa por el método de la matriz adjunta, ya que cada elemento está dividido por dicho determinante y si éste es cero, entonces la operación no está definida.

$$C_x^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\det(C_x)} & \frac{-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \\ \frac{-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} & \frac{\sigma_1^2}{\det(C_x)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Donde $\det(C_x) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2)$ es el determinante de la matriz de varianzas-covarianzas de la ecuación (22). Ahora se demuestra la relación entre las dos distancias (Mahalanobis e Euclidiana) para el caso en que existen solamente dos atributos, x_1 y x_2 . Los primeros dos términos de la raíz de la ecuación (23) pueden ser rescritos como se muestra en (26).

$$\left[(x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2}) \right] C_x^{-1} \quad (26)$$

Sustituyendo el valor de C_x^{-1} por el contenido en la ecuación (25) y realizando las operaciones correspondientes, se llega a la ecuación (27) y al ingresar el tercer término de la ecuación de la distancia de Mahalanobis, se tiene la ecuación (28).

$$\left[\frac{\sigma_2^2 (x_1 - x_{id1})^2 - (x_2 - x_{id2})(x_1 - x_{id1})\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \quad \frac{\sigma_1^2 (x_2 - x_{id2})^2 - (x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2})\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\det(C_x)} \right] \quad (27)$$

$$\left[(x_1 - x_{id1})(x_2 - x_{id2}) \right] C_x^{-1} \begin{bmatrix} (x_1 - x_{id1}) \\ (x_2 - x_{id2}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Desarrollando estas ecuaciones matemáticamente y realizando la factorización correspondiente se llega a la ecuación (29):

$$MD_i = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_{id1}}{\sigma_1} \right)^2 + \left[\left(\frac{x_2 - x_{id2}}{\sigma_2} \right)^2 - \rho_{12} \left(\frac{x_1 - x_{id1}}{\sigma_1} \right) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right)^2} \quad (29)$$

Esta expresión muestra que la segunda parte del binomio al cuadrado integra como primer factor al coeficiente de correlación que tienen los dos atributos de las alternativas evaluadas. Así, se puede observar que cuando dos atributos están incorrelacionados ($\rho_{12} = 0$), esta ecuación es reducida a la fórmula de la distancia Euclidiana normalizada, dado que la segunda parte de ésta es cero. Por lo tanto al no existir la correlación entre los atributos, en



la técnica TOPSIS las distancias entre las alternativas A^k no son afectadas por la distancia de Mahalanobis. En caso contrario, cuando existe la correlación, ésta será incluida por la distancia de Mahalanobis, por lo que al tomar en cuenta la correlación entre los atributos, se considera que la técnica TOPSIS se vuelve estadísticamente más suficiente, ya que integra un factor importante que antes no se consideraba.

Como se puede observar, con la representación de la distancia de Mahalanobis evaluada para dos atributos, x_1 y x_2 , ésta puede ser claramente generalizada hasta $J+L$ atributos y el resultado sería semejante al obtenido anteriormente. Un desarrollo semejante se puede demostrar para la distancia que tiene cada una de las alternativas a la anti-ideal, lo cual no se realiza en este trabajo por restricciones de espacio.

6. Caso de Estudio

Una empresa del sector automotriz en Ciudad Juárez, Chihuahua, México, tenía la necesidad de adquirir un nuevo robot para realizar una tarea que anteriormente fue realizada por operarios y que ha reportado accidentes frecuentes. El problema de selección constaba de doce alternativas de robots y cuatro atributos de evaluación: Costo de la inversión en miles de dólares (X_1), Capacidad de carga en kilogramos (X_2), Velocidad del robot en metros por segundo (X_3) y Repetibilidad en milímetros (X_4), todos ellos cuantitativos. La matriz de decisión final se muestra en la tabla 1. Obsérvese que en la antepenúltima y penúltima líneas aparecen las alternativas ideal e anti-ideal, con las cuales se comparan todas las demás alternativas en el proceso de decisión.

Par la obtención de los niveles de importancia que tenían cada uno de los atributos en evaluación, se usó la técnica de votación y consenso, donde un grupo de decisión integrado por cinco personas provenientes del departamentos de ingeniería, finanzas, gerencia media y un representante sindical, los cuales se representa por $E_1, E_2 \dots E_5$. Cada uno de los expertos emitió su juicio en una escala del uno al nueve, donde el uno representaba la nula importancia del atributo y el nueve la importancia extrema. Las valoraciones obtenidas por cada uno de los atributos se promediaron, los cuales se sumaron para obtener un gran promedio. Cada promedio se dividió entre ese gran promedio para obtener el nivel de importancia w_i de cada uno de los atributos. La tabla 2 ilustra el proceso de obtención.

De la misma manera, para este caso específico se supone que los atributos tienen la ponderación que se indica en la última fila, denominada w . Obsérvese que la suma de los w_i es igual a la unidad.

Robot	Costo	Velocidad	Repetibilidad	Capacidad de Carga
R ₁	45.00	1.80	0.18	140.00
R ₂	34.00	1.50	0.16	110.00
R ₃	62.00	0.80	0.09	195.00
R ₄	52.50	1.10	0.11	160.00
R ₅	54.00	1.30	0.14	165.00
R ₆	50.00	1.55	0.17	150.00
R ₇	65.00	0.98	0.10	195.00
R ₈	39.50	1.05	0.11	120.00
R ₉	48.00	1.25	0.13	145.00
R ₁₀	49.80	1.35	0.16	155.00
R ₁₁	59.00	1.65	0.17	175.00
R ₁₂	48.00	1.25	0.12	150.00
A+	34.00	1.80	0.09	195.00
A-	65.00	0.80	0.18	110.00

Tabla 1. Matriz de decisión final

Los resultados obtenidos de las evaluaciones realizadas mediante las dos técnicas son las que se listan en la Tabla 3, donde los números entre corchetes indican el orden en que deberían ser escogidas las alternativas. Así, al realizar el análisis de la información empleando la técnica TOPSIS con la distancia Euclidiana, se encuentra que se debe seleccionar el robot representado por R₁, ya que es la que alcanza el menor valor en su índice RC con 0.4414. Sin embargo, empleando la misma técnica, pero integrando la distancia de Mahalanobis, se debe de elegir la alternativa



representada por R_3 , dado que el índice RC es de 0.133, lo cual indica que los resultados son totalmente antagónicos, dado que existe reversa de órdenes en las soluciones propuestas por las técnicas

Robot	Costo	Velocidad	Repetibilidad	Capacidad de Carga
E_1	7.0	6.0	9.0	7.0
E_2	5.0	8.0	7.0	6.0
E_3	7.0	8.0	7.0	7.0
E_4	8.0	8.0	6.0	6.0
E_5	7.0	8.0	9.0	8.0
PROMEDIO	6.8	7.6	7.6	6.8
w	0.236	0.264	0.264	0.236

Tabla 2. Obtención de los niveles de importancia de los atributos

Robot	TOPSIS CON DISTANCIA EUCLIDIANA			TOPSIS CON DISTANCIA DE MAHALANOBIS		
	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$	$\rho(A^+, A^k)$	$\rho(A^-, A^k)$	$RC(A^+, A^k)$
R_1	0.052	0.066	0.441 [1]	2.199	0.335	0.868 [12]
R_2	0.052	0.062	0.459 [2]	1.785	0.686	0.722 [8]
R_3	0.071	0.057	0.554 [12]	0.336	2.197	0.133 [1]
R_4	0.052	0.047	0.522 [8]	0.684	1.787	0.277 [3]
R_5	0.049	0.045	0.524 [9]	1.353	1.109	0.55 [7]
R_6	0.051	0.05	0.498 [5]	2.019	0.465	0.813 [11]
R_7	0.066	0.054	0.549 [11]	0.489	1.998	0.197 [2]
R_8	0.055	0.053	0.510 [7]	0.697	1.777	0.282 [4]
R_9	0.047	0.046	0.508 [6]	1.123	1.34	0.456 [6]
R_{10}	0.051	0.044	0.536 [10]	1.826	0.64	0.740 [9]
R_{11}	0.055	0.057	0.490 [4]	1.995	0.494	0.801 [10]
R_{12}	0.045	0.049	0.476 [3]	0.881	1.583	0.357 [5]

Tabla 3. Resultados Obtenidos por Ambos Métodos

Es importante señalar que para este caso de estudio se analizaron los valores de los atributos de las alternativas propuestas por la técnica usando las dos distancias, R_1 y R_3 , dado que existía confusión en relación a cual elegir. En esta ocasión el grupo de decisión consideró que el robot R_3 debía ser seleccionado, dado que solo costaba 3000 pesos más que R_1 (\$48,000-\$45,000), la velocidad no era considerada crítica para el proceso, la precisión o repetibilidad era menor en 0.06 mm, lo cual indicaba una superioridad sobre R_1 en un 50% y la capacidad de carga era superior en 10 kilogramos (150 kg-140kg).

Conclusiones

En base al caso de estudio aquí presentado, se puede concluir que la inclusión de la distancia de Mahalanobis en las evaluaciones por medio de TOPSIS genera soluciones diferentes a las propuestas por la técnica original propuesta por Yoon (1980). Esto se debe principalmente a la inclusión del coeficiente de correlación, el cual es una medida de la dependencia lineal que existe entre los atributos, el cual no es considerado en la evaluación por la técnica TOPSIS tradicional. Se concluye que la técnica propuesta es más suficiente a la original desde el punto de vista estadístico, dado que integra en la evaluación a un parámetro que antes era ignorado, por lo cual es más completa.

Sin embargo, la evaluación de alternativa con la técnica TOPSIS en la que se incluya la distancia de Mahalanobis es más complicada a la distancia euclidiana tradicional, por lo que futuras investigaciones deben enfocarse en



determinar métricas que ayuden a decidir qué tipo distancia emplear en ciertas condiciones de multicolinealidad. Estas métricas pueden ser el determinante de la matriz e correlación o el eigenanálisis de la misma.

Bibliografía

- Adler, R. W. "Strategic Investment Decision Appraisal Techniques: The Old and the New", *Business Horizons*, 43 (6), 2000, pp 15-22.
- Ahn, B. S. and Park, K. S. "Comparing methods for multiattribute decision making with ordinal weights", *Computers and Operations Research*, 35 (5), 2008, pp 1660-1670.
- Bhattacharya, A. Sarkar, B. and Mukherjee, S. K. "Distance-based consensus method for ABC analysis", *International Journal of Production Research*, 45(15), 2007, pp 3405-3420.
- Byun, H. S. and Lee, K. H. "A decision support system for the selection of a rapid prototyping process using the modified TOPSIS method", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26(11/12), 2006, pp1338-1347.
- Chen, M. F. and Tzeng, G. H. "Combining gray relation and TOPSIS concepts for selecting an expatriate host country", *Mathematical and Computer Modelling*, 40, 2004, pp 1473-1490.
- Deng, Y. "Plant location selection based on fuzzy TOPSIS", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28(7/8), 2006, pp 839-844.
- Ghrayeb, O., Phojanamongkolkij, N. Marcellus, R. Zhao, W. "A practical framework to evaluate and select robots for assembly operations", *Journal of Advanced Manufacturing Systems*, 3(2), 2004, pp151-167.
- Hajkowicz, S. and Higgins, A. "A comparison of multiple criteria analysis techniques for water resource management", *European Journal of Operational Research*, 184 (1), 2008, pp 255-265.
- Hofmann, C. and Orr, S. "Advanced manufacturing technology adoption-the German experience", *Technovation*, 25 (7), 2005, pp 711-724.
- Hoyt, W. T., Imel, Z. E. and Chan, F. "Multiple Regression and Correlation Techniques: Recent Controversies and Best Practices", *Rehabilitation Psychology*, 53 (3), 2008, pp 321-339.
- Janic, M. "Multicriteria evaluation of high-speed rail, transrapid maglev, and air passenger transport in Europe", *Transportation Planning and Technology*, 26(6), 2003, pp. 491-512.
- Johnson, R.A. and Wichern, D.W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, third edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1992.
- Kiang, M. Y. "A comparative assessment of classification methods", *Decision Support Systems*, 35 (4), 2003, pp 441-454.
- Kovács, P., Petres, T. and Tóth, L. "A New Measure of Multicollinearity in Linear Regression Models", *International Statistical Review*, 73(3), 2005, pp 405-412.
- Kwong, C. K. and Tam, S. M. "Case-based reasoning approach to concurrent design of low power transformers", *Journal of Materials Processing Technology*, 128, 2002, pp. 136-141.
- Lai, Y. J., Liu, T. Y. and Hwang, C. L. "TOPSIS for MODM", *European Journal of Operational Research*, 76(3), 1994, pp 486-500.
- Lefley, F., Wharton, F., Hajek, L., Hynek, J. and Janecek, V. "Manufacturing investments in the Czech Republic: - An international comparison", *International Journal of Production Economics*, 88 (1), 2004, pp 1-14.
- Li, B., Morris, A. J. and Martin, E. B. "Generalized partial least squares regression based on the penalized minimum norm projection", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 72 (1), 2004, pp 21-26.
- Lipovetsky, S. and Conklin, W. M. "Multiobjective regression modifications for collinearity", *Computers & Operations Research*, 28(13), 2001, pp 1333-1345.
- Liu, R. X., Kuang, J., Gong, Q. and Hou, X.L. "Principal component regression analysis with SPSS", *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 71(2), 2003, pp 141-147.
- MacDougall, S. L. and Pike, R. H. "Consider your options: changes to strategic value during implementation of advanced manufacturing technology", *Omega*, 31 (1), 2003, pp 1-15.
- Meloun, M. and Militky, J.V. "Detection of single influential points in OLS regression model building", *Analytica Chimica Acta*, 439 (2), 2001, pp 169-191.
- Meredith, J. and Suresh, N. "Justification techniques for advanced manufacturing technologies", *International Journal of Production Research*, 24(5), 1987, pp 1043-1057.
- Milani, A. S., Shanian, A. and Madoliat, R. "The effect of normalization norms in multiple attribute decision making models: A case study in gear material selection", *Structural Multidisciplinary Optimization*, 29(4), 2005, pp. 312-318.
- Montgomery, D.C., Peck, E. A. and Vining, G. G. *Introduction to linear regression analysis*. Compañía Editorial Continental, Mexico, 2004.
- Nocairi, H., Mostafa - Qannari, E., Vigneau, E. and Bertrand, D. "Discrimination on latent components with respect to patterns. Application to multicollinear data", *Computational Statistics and Data Analysis*, 48 (1), 2005, pp 139-147.
- Parkan, C. and Wu, L. "Decision-making and performance measurement models with applications to robot selection", *Computers & Industrial Engineering*, 36(3), 1999, pp 503-523.
- Pasini, A. "A bound for the collinearity graph of certain locally polar geometries", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 58(1), 1991, pp 127-130.
- Prabhakaran, R. T. D., Babu, B. J. C. and Agrawal, V. P. "Optimum selection of a composite product system using MADM", *Materials & Manufacturing Processes*, 21(8), 2006, pp 883-891.
- Rao, R. and Davim, J. A. "Decision-making framework model for material selection using a combined multiple attribute decision-making method", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 35(7/8), 2007, pp751-760.
- Rao, R. V. "Evaluation of environmentally conscious manufacturing programs using multiple attribute decision-making methods", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part B - Engineering Manufacture*, 222(3), 2008, pp 441-451.
- Rao, R. V. "Machinability evaluation of work materials using a combined multiple attribute decision-making method", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28(3/4), 2006, pp 221-227.
- Saaty, T. L. "Time dependent decision-making; dynamic priorities in the AHP/ANP: Generalizing from points to functions and from real to complex variables", *Mathematical and Computer Modeling*, 46(7), 2007, pp 860-891.
- Small, M. and Chen, I. "Economic and strategic justification of AMT inferences from industrial practices", *International Journal of Production Economic*, 49(1), 1997, pp 65-75.



- Srdjevic, B., Medeiros, Y. D. P. and Faria, A. S. "An objective multi-criteria evaluation of water management scenarios", *Water Resources Management*, 18, 2004, pp. 35–54.
- Wiecek, M. M., Matthias, E., Fadel, G. and Ruiz-Figueira, J. "Multiple criteria decision making for engineering", *Omega*, 36 (3), 2008, pp 337-339.
- Xiang, S., Nie, F. and Zhang, C. "Learning a Mahalanobis distance metric for data clustering and classification", *Pattern Recognition*, In Press, Accepted Manuscript, 2008.
- Yoon, K. and Hwang, C. L. "Manufacturing plant location analysis by multiple attribute decision making: Part I—single-plant strategy", *International Journal of Production Research*, 23, 1985, pp. 345–359.
- Yoon, K. P. and Hwang, C. L. "Multiple Attribute Decision Making. An introduction", *Quantitative Applications in the Social Sciences*, 104, 1995.
- Yurdakul, M. and Çoğ̃un, C. "Development of a multi-attribute selection procedure for non-traditional machining processes", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -- Part B -- Engineering Manufacture*, 217(7), 2003, pp 993-1009.
- Yusuff, R. and Hashim, M. "A preliminary study on the potential use of the analytical hierarchical process (AHP) to predict advanced manufacturing technology (AMT) implementation", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 7(5), 2001, pp 421-427.

El **Dr. Jorge Luis García Alcaraz** es Ingeniero Industrial y Maestro en Ciencias en Ingeniería Industrial por el Instituto Tecnológico de Colima. Doctor en Ciencias en Ingeniería Industrial por el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez. Sus líneas de investigación son la aplicación de tecnologías a los procesos de producción, estadística industrial y análisis multivariado de problemas. Actualmente se encuentra adscrito al Departamento de Ingeniería Industrial y Manufactura del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, en Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

La **Mtra. Nancy Angélica Coronel Gónzales** es ingeniero industrial por el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez y Maestra en Calidad y Productividad por el Instituto Tecnológico de Monterrey. Sus líneas de investigación son seis sigma y el control de calidad total. Actualmente se desempeña como profesora por asignatura en el Departamento de Ingeniería y Manufactura del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, en Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

