

---

## Un Nuevo Modelo para Estimar el Punto de Cambio en la Media de un Proceso

Dr. Eduardo Marroquín Prado  
emarro53@hotmail.com

*Instituto Tecnológico de Saltillo  
Departamento de Ingeniería Industrial  
Saltillo, Coahuila, México*

M.C. Eugenia Rodríguez Contreras  
erc7304@yahoo.com.mx

Ing. Patricia Salas Hernández  
pattysalas1@hotmail.com

---

### Resumen

El Análisis de Punto de Cambio (APC) consiste en determinar si en una secuencia de variables aleatorias se observa un cambio significativo en su patrón de comportamiento, estimar dónde se originó el cambio y estimar la magnitud del cambio.

Samuel et al.<sup>1</sup> desarrollaron un modelo basado en Estimadores de Máxima Verosimilitud (MLE) para estimar el punto de cambio en la media del proceso cuando se presenta un cambio repentino (S). Posteriormente, Perry y Pignatiello<sup>2</sup> desarrollaron un modelo también basado en MLE para estimar el punto de cambio en la media del proceso cuando se presenta un cambio con tendencia (T). Samuel et al.<sup>1</sup> compararon la eficiencia de su modelo T con la eficiencia del modelo repentino S. A través de una simulación encontraron que su modelo es más eficiente que el modelo S cuando el proceso está sujeto a cambios con tendencia.

En este trabajo se propone y se evalúa el desempeño de un modelo combinado (C) basado en MLE para estimar el punto de cambio en la media de un proceso cuando se presenta una combinación de cambio repentino y tendencia. Los resultados de la evaluación muestran que el modelo combinado C es más eficiente que el modelo T bajo ciertas condiciones de operación del proceso, siendo por lo tanto una buena opción para detectar cambios en la media del proceso.

**Palabras Clave:** Punto de Cambio, Gráficas de Control, Longitud Promedio de Corrida, ARL.

### Introducción

Las gráficas de control de Shewhart se han empleado ampliamente para monitorear y controlar procesos de manufactura. Una de ellas es la gráfica de medias y rangos utilizada para controlar la media y la dispersión del proceso. Cuando una gráfica de control identifica un señal fuera de control, tradicionalmente se buscan las causas del fuera de control en el momento en que éste se detecta generando confusión y costos relacionados con la identificación de las causas, cuando en realidad el cambio pudo haber iniciado mucho antes de la señal y una parte considerable del producto podría no cumplir con la calidad dimensional o funcional requerida por el consumidor. Por lo tanto,

las gráficas de control identifican el punto donde el proceso está fuera de control pero no determinan en qué punto o momento se inició el fuera de control.

Las gráficas de control de Shewhart son sensibles a cambios grandes en la media del proceso pero insensibles a cambios pequeños, Wu<sup>3</sup>, Hawkins et al.<sup>4</sup>, Hawkins y Zamba<sup>5</sup> y Sheu y Lin<sup>6</sup>. Para solucionar esta problemática se han desarrollado y aplicado una serie de estrategias a utilizar en conjunto con las gráficas de control de Shewhart para incrementar la sensibilidad de éstas últimas para detectar cambios en la media. Dentro de estas estrategias se pueden mencionar a) mejor estimación de los parámetros, b) reglas de corridas, c) gráficas adaptativas, d) gráfica de promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA<sup>i</sup>), e) gráfica de sumas acumuladas (CUSUM<sup>ii</sup>) y f) análisis de punto de cambio.

Cada una de estas estrategias o modelos estadísticos esta basado en ciertas condiciones de operación del proceso y por consecuencia son eficientes para esas situaciones, por lo que no existe un modelo que sea superior al resto de ellos en cualquier condición de operación del proceso. Así por ejemplo, las gráficas de control CUSUM y EWMA son más sensibles que la gráfica de control de Shewhart para identificar cambios pequeños en la media del proceso pero insensibles a cambios grandes, Sheu y Lin<sup>6</sup>. A diferencia de las gráficas de Shewhart, la gráfica CUSUM tiene la habilidad de identificar el momento en que el proceso inicia su estado de fuera de control, pero su uso en la práctica es escaso debido a la dificultad en su implementación.

El Análisis de Punto de Cambio (APC) es una herramienta estadística que aplicada al control estadístico del proceso, permite detectar en qué momento el proceso está fuera de control e identificar en qué momento el proceso inició el estado fuera de control.

El problema de punto de cambio se puede plantear como sigue. Se tiene una secuencia de variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Las primeras  $x_1, x_2, \dots, x_k$  variables provienen de una distribución de probabilidad que se considera como aceptable y se identifica por  $F_a$ , pero las  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  variables restantes provienen de una distribución de probabilidad que se considera no aceptable y se identifica por  $F_r$ . Se asume que se conoce  $F_a$  y  $F_r$ , pero no se conoce  $k$ . Esto es, la distribución de probabilidad de donde provienen los datos cambia de un estado aceptable a un estado no aceptable en un punto desconocido  $k$ . El objetivo del APC es estimar el punto  $k$  en que la distribución de probabilidad  $F_a$  cambia a la distribución no aceptable  $F_r$ .

Page<sup>7</sup> enfrentó el problema de punto de cambio en la media del proceso y desarrolló la gráfica de control CUSUM. Posteriormente, Roberts<sup>8</sup> desarrolló la gráfica de control EWMA. Ambas gráficas tienen el propósito de mejorar la sensibilidad para identificar cambios pequeños en la media del proceso.

Desde entonces a la fecha se han desarrollado muchas aportaciones al problema de punto de cambio. Para Chen y Gupta<sup>9</sup>, el problema de punto de cambio se ha analizado con mayor frecuencia para el caso de un solo cambio. Por ejemplo, Taylor<sup>10</sup> presenta

---

<sup>i</sup> Exponentially weighted moving average

<sup>ii</sup> Cumulative sum

una metodología para el análisis de punto de cambio simple, la cual se basa en los conceptos de la gráfica de control CUSUM y la técnica *bootstrap*.

Samuel et al.<sup>1</sup> desarrollaron un modelo basado en estimadores de máxima similitud (MLE)<sup>iii</sup> para estimar el punto de cambio en la media del proceso cuando se presenta un cambio repentino, S. El modelo S se aplica después de que la gráfica de control de medias identifica una señal fuera de control.

El modelo S asume que el proceso está bajo control con las observaciones provenientes de una distribución normal con media  $\mu_0$  y varianza  $\sigma^2$  conocidas. En un punto desconocido  $k$  la media del proceso cambia de  $\mu_0$  a  $\mu_1$ , y permanece constante hasta que la gráfica de control detecta la señal fuera de control, el modelo estima el punto de cambio y las causas del cambio son identificadas y eliminadas. Un cambio repentino se puede apreciar en la gráfica de control (a) de la figura 1 donde se observa que el punto de cambio se estima entre los puntos 11 y 12.

Perry y Pignatiello<sup>2</sup> desarrollaron un modelo basado en MLE para estimar el punto de cambio en la media del proceso cuando se presenta un cambio con tendencia, T. El modelo T se aplica después de que la gráfica de control de medias identifica una señal fuera de control.

El modelo T asume que el proceso está bajo control con las observaciones provenientes de una distribución normal con media  $\mu_0$  y varianza  $\sigma^2$  conocidas. En un punto desconocido  $k$  la media del proceso cambia de  $\mu_0$  a  $\mu_i = \mu_0 + \beta(i - \tau)$ , y permanece con esa tendencia hasta que la gráfica de control detecta la señal fuera de control, el modelo estima el punto de cambio y las causas del cambio son identificadas y eliminadas. Donde  $\beta$  es la pendiente de la ecuación lineal que define la tendencia.

Perry y Pignatiello<sup>2</sup> compararon la eficiencia de su modelo T con la eficiencia del modelo S. A través de una simulación encontraron que su modelo T es más eficiente que el modelo S cuando el proceso está sujeto a cambios con tendencia. Un cambio con tendencia se puede apreciar en la gráfica de control (b) de la figura 1 donde se observa que el punto de cambio se estima entre los puntos 8 y 9.

En este trabajo se propone y se evalúa el desempeño de un modelo combinado basado en MLE para analizar el punto de cambio en la media de un proceso cuando se presenta un cambio repentino en conjunto con una tendencia. En base a una simulación y considerando la Longitud Promedio de Corrida (ARL) como criterio de desempeño, los resultados de la evaluación muestran que el modelo combinado, C, es más eficiente que el modelo T bajo ciertas condiciones de operación del proceso, siendo por lo tanto una buena opción para detectar cambios en la media del proceso.

### **Modelo Propuesto**

Al igual que los modelos S y T, el modelo C asume que el proceso está bajo control con las observaciones provenientes de una distribución normal con media  $\mu_0$  y varianza  $\sigma^2$  conocidas. En un punto desconocido  $k$  la media del proceso cambia de  $\mu_0$  a

---

<sup>iii</sup> *Maximum likelihood estimators*

$\mu_i = \mu_0 + \beta_0 + \beta_1(i - \tau + 1)$ , y permanece con esa tendencia hasta que la gráfica de control detecta la señal fuera de control, el modelo estima el punto de cambio y las causas del cambio son identificadas y eliminadas. Donde  $\beta_0$  es el cambio repentino que ocurre entre el punto  $k$  y el punto  $k+1$  y  $\beta_1$  es la pendiente de la ecuación lineal que define la tendencia. La gráfica de control (c) de la figura 1 muestra que el proceso está fuera de control en el punto 15 pero el modelo C estima el cambio entre los puntos 13 y 14. Más específicamente, entre los puntos 13 y 14 la media se incrementó en  $\beta_0$  y a partir del punto 14 sigue una tendencia positiva  $\beta_1$  hasta que la gráfica detecta el cambio en el punto 15.

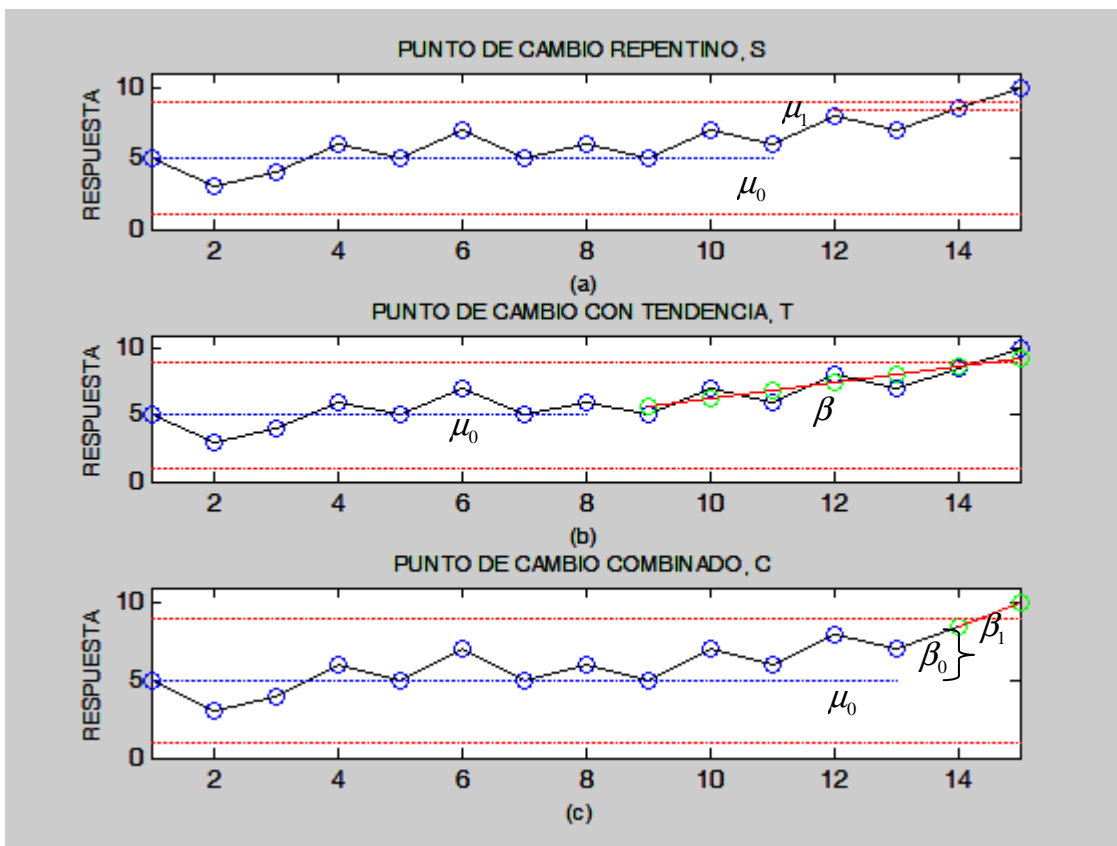


Figura 1. Modelos de Punto de Cambio: a) Modelo S, b) Modelo T y c) Modelo C.

Utilizando estimadores de máxima similitud, se obtiene el modelo matemático que se muestra en la ecuación (1) la cual se utiliza para estimar el punto de cambio en la gráfica de control de medias. Considerando  $\mu_0 = 0$ , el desarrollo de  $V_\tau$  se muestra en el apéndice al final del documento.

$$V_\tau = \left( 2\beta_0 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i + 2\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i(i - \tau - 1) - (T - \tau)\beta_0^2 - 2\beta_0\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i - \tau - 1) - \sum_{i=\tau+1}^T (\beta_1(i - \tau - 1))^2 \right) \quad (1)$$

Para cada punto u observación  $\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq T-1$ , se calcula  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de acuerdo a las ecuaciones (2) y (3) respectivamente y se sustituyen estos valores en (1). Donde  $T$  es el número de la observación que se sale de control.

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i-\tau-1) - \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)}{(T-\tau)}}{\sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)^2 - \frac{\left(\sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)\right)^2}{(T-\tau)}} \quad (2)$$

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i - \beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)}{(T-\tau)} \quad (3)$$

Si la gráfica de control detecta una señal fuera de control por arriba del límite superior, el proceso está experimentando una tendencia positiva. El punto de cambio estimado  $k$  se identifica por  $\tau-1$  donde  $\tau$  es el punto asociado con  $V_\tau$  máximo y  $\beta_0 \geq 0$ . Similarmente, si la gráfica de control detecta una señal por abajo del límite inferior, el proceso está experimentando un tendencia negativa. El punto de cambio estimado  $k$  se identifica por  $\tau-1$  donde  $\tau$  es el punto asociado con  $V_\tau$  máximo y  $\beta_0 \leq 0$ .

### Evaluación del Desempeño del Modelo Propuesto

Para mostrar el desempeño del modelo propuesto, se realizó una simulación de un proceso normal con  $\mu_0 = 5$  y  $\sigma^2 = 1$ . El proceso se simula bajo 49 escenarios diferentes, cada uno de los cuales es una combinación diferente de  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , los cuales toman valores de 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.50 y 2.00. Para cada uno de los escenarios el proceso se simula en condiciones bajo control ( $\beta_0 = 0$  y  $\beta_1 = 0$ ), durante 25 observaciones. Después de las 25 observaciones, el proceso se simula en condiciones anormales de operación combinando los valores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  ya mencionados.

Cuando la gráfica de control muestra el primer punto fuera de control, se detiene el proceso de simulación y se estiman los puntos de cambio promedio por medio de los modelos repentino, S, tendencia, T, y combinado, C. El modelo que estime el punto de cambio promedio  $k=25$  es el más eficiente. Para realizar la simulación se diseñó un programa en Matlab y cada escenario se simuló con 10,000 réplicas. Los resultados de la simulación se muestran en el cuadro 1.

Los valores del cuadro 1 muestran, para cada una de las combinaciones  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , el punto promedio donde cada uno de los tres modelos estima el cambio en la media. Por ejemplo, cuando  $\beta_0 = 1$  y  $\beta_1 = 1$ , el método de cambio repentino, S, estima que el proceso sufre un cambio en la media, en promedio, en el punto 22.76, el método con

tendencia, T, estima el cambio promedio en el punto 24.97 y el método combinado, C, estima el cambio promedio en el punto 24.41. En este caso el modelo T es más eficiente que los otros dos porque el punto de cambio promedio estimado es 24.97 que es más cercano a 25 que es el punto donde se modificó la media en la simulación.

$\beta_0$	Modelo	$\beta_1$						
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
0.00	S	0.54	5.65	2.72	2.84	11.84	0.95	4.95
	T	<b>24.80</b>	<b>26.87</b>	26.27	26.08	26.01	25.87	25.77
	C	22.87	27.48	<b>26.19</b>	<b>25.73</b>	<b>25.43</b>	<b>24.95</b>	<b>24.49</b>
0.25	S	302.0	33.25	13.43	8.72	9.41	10.53	20.95
	T	75.25	<b>25.84</b>	25.82	25.70	25.67	25.64	<b>25.62</b>
	C	<b>67.74</b>	26.38	<b>25.73</b>	<b>25.34</b>	<b>25.12</b>	<b>24.79</b>	24.28
0.50	S	91.17	22.14	8.27	28.38	7.51	7.34	18.58
	T	14.87	<b>25.04</b>	25.30	25.4	25.41	25.46	<b>25.47</b>
	C	<b>29.00</b>	25.61	<b>25.26</b>	<b>25.04</b>	<b>24.93</b>	<b>24.59</b>	24.13
0.75	S	44.99	17.10	24.80	26.04	1.61	5.59	15.19
	T	11.21	24.51	<b>24.97</b>	<b>25.16</b>	<b>25.20</b>	<b>25.27</b>	<b>25.33</b>
	C	<b>24.92</b>	<b>25.04</b>	24.88	24.81	24.66	24.48	24.06
1.00	S	42.66	12.07	8.09	17.47	22.76	18.84	7.14
	T	13.08	24.17	<b>24.69</b>	<b>24.91</b>	<b>24.97</b>	<b>25.14</b>	<b>25.17</b>
	C	<b>23.95</b>	<b>24.54</b>	24.55	24.55	24.41	24.24	23.99
1.50	S	13.56	20.99	22.07	12.19	19.03	9.02	11.57
	T	19.28	23.94	<b>24.41</b>	<b>24.58</b>	<b>24.71</b>	<b>24.85</b>	<b>24.93</b>
	C	<b>23.63</b>	<b>23.99</b>	24.01	24.00	24.05	23.96	24.01
2.00	S	22.87	12.79	8.59	23.05	15.90	22.43	21.84
	T	22.61	<b>24.07</b>	<b>24.35</b>	<b>24.49</b>	<b>24.59</b>	<b>24.73</b>	<b>24.80</b>
	C	<b>23.26</b>	23.35	23.50	23.46	23.54	23.62	23.53

Cuadro 1. Punto de Cambio Promedio.

### Análisis de Resultados

Cuando el proceso está dentro de control ( $\beta_0 = 0$  y  $\beta_1 = 0$ ) el modelo T es más eficiente que los modelos S y C para identificar el cambio en la media del proceso. Para cualquier otra combinación de valores  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , el modelo S es menos eficiente y consistente que los modelos T y C, observándose que no existe un modelo entre T y C que sea más eficiente que el otro, para detectar cambios en la media del proceso.

Para un proceso con cambio repentino en la media pero sin tendencia ( $\beta_0 > 0$  y  $\beta_1 = 0$ ), el modelo C es más eficiente que el modelo T. Similarmente, para un proceso sin cambio repentino en la media, pero con tendencia ( $\beta_0 = 0$  y  $\beta_1 \geq 0.50$ ), el modelo C es más eficiente que el modelo T. Estos resultados sugieren que si se tiene un proceso cuya media sufre un cambio ya sea repentino o con tendencia, el modelo C es más eficiente que el modelo T para detectar el cambio en la gran mayoría de los casos analizados.

A excepción de  $\beta_1 = 0.25$  y  $\beta_1 = 2$ , el modelo C es más eficiente que el modelo T para valores pequeños de  $\beta_0$ ,  $\beta_0 \leq 0.5$ . En otras palabras, cuando se tiene un proceso con

pequeños cambios repentinos sin importar la magnitud de la tendencia, el modelo C es más eficiente que el modelo T para detectar cambios en la media. De forma similar, para valores grandes de  $\beta_0$ ,  $\beta_0 \geq 0.75$  y valores pequeños de  $\beta_1$ ,  $\beta_1 \leq 0.5$ , el modelo C es más eficiente que el modelo T, esto es, cuando el proceso sufre cambios repentinos grandes y pequeñas tendencias en la media.

Por otro lado, para valores grandes de  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , el modelo T es más eficiente que el modelo C. Esto es, cuando el proceso tiene cambios repentinos grandes y/o tendencias grandes en la media, el modelo T es más eficiente para identificar el punto de cambio en la media del proceso.

### Ejemplo de Aplicación

La segunda columna del cuadro 2 muestra una secuencia de 14 medias de un proceso con media  $\mu_0 = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ . De acuerdo a los datos en algún punto de la secuencia la media del proceso se incrementa.

Se aplica el modelo combinado C para estimar el punto de cambio  $k$ . La tercera y cuarta columna del cuadro 2 muestran, para cada punto, los valores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , respectivamente. En la quinta columna se muestran los valores de  $V_\tau$  para todos aquellos puntos donde  $\beta_0 \geq 0$ . De acuerdo a los valores de  $V_\tau$ , el valor máximo ocurre en el punto 11 por lo que el punto de cambio estimado es el 10.

No.	$\bar{x}_i$	$\beta_0$	$\beta_1$	$V_\tau$
1	-0.4326	-0.9999	0.2379	-
2	-1.6656	-0.9366	0.2597	-
3	0.1253	-0.4339	0.2265	-
4	0.2877	-0.4107	0.2570	-
5	-1.1465	-0.4331	0.3036	-
6	1.1909	0.1876	0.2442	15.7763
7	1.1892	-0.0699	0.3517	-
8	-0.0376	-0.4376	0.5315	-
9	0.3273	-0.1728	0.6115	-
<b>10</b>	0.1746	0.0386	0.7616	17.9944
<b>11</b>	<b>0.8133</b>	<b>0.6642</b>	<b>0.8296</b>	<b>18.0103</b>
12	1.9758	1.2949	0.9789	17.4228
13	0.9117	0.9177	3.0215	16.3011
14	3.9332			

Cuadro 2. Datos y Resultados al Aplicar el Modelo C.

En resumen, la gráfica de control identifica que el proceso está fuera de control en el punto 14, el modelo estima que el cambio en la media sucedió entre los puntos 10 y 11, incrementándose de 0 a 0.6642 y de este punto en adelante sigue una tendencia positiva de 0.8296 hasta que el proceso se sale de control.

En calidad de ejemplo, el cuadro 3 muestra los diferentes términos y valores necesarios para calcular  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $V_\tau$  para  $\tau=10$ .

Términos	Valores
$(T - \tau)$	4
$\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i$	7.634
$\sum_{i=\tau+1}^T (i - \tau - 1)$	6
$\sum_{i=\tau+1}^T (i - \tau - 1)^2$	14
$\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i - \tau - 1)$	15.5988
$\sum_{i=\tau+1}^T (\beta_1 (i - \tau - 1))^2$	9.6343

Cuadro 3. Términos y Valores para Calcular  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $V_\tau$ .

Sustituyendo los valores correspondientes en (2), se tiene

$$\beta_1 = \frac{15.5988 - \frac{(7.634)(6)}{4}}{14 - \frac{(6)^2}{4}} = 0.8296$$

Sustituyendo  $\beta_1$  y los valores correspondientes en (3) se obtiene

$$\beta_0 = \frac{7.634 - (0.8296)(6)}{4} = 0.6642$$

Una vez determinados los valores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , estos se sustituyen en la ecuación (1), de modo que

$$V_{10} = (2(0.6642)(7.634) + 2(0.8296)(15.5988) - 4(0.6642)^2 - 2(0.6642)(0.8296)(6) - 9.6343)$$

$$V_{10} = 18.0103$$

Este procedimiento se sigue para todos los valores de  $\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq T-1$ , obteniéndose los resultados del cuadro 2.

## Conclusiones

En este trabajo se propuso y se evaluó el desempeño de un modelo combinado C para estimar el punto de cambio en la media del proceso cuando la gráfica de control de medias identifica una señal fuera de control. El modelo está basado en los estimadores de máxima similitud.

En base a una simulación se comparó la eficiencia del modelo combinado C para estimar el punto de cambio, con la eficiencia de los modelos; repentino, S y tendencia, T. Un análisis de los resultados de la simulación indica que los modelos T y C son más eficientes que el modelo S. Sin embargo, ninguno de estos dos modelos es más eficiente que el otro para cualquier condición de operación del proceso de las aquí simuladas.

Los resultados de la simulación mostraron que si se tiene un proceso cuya media sufre un cambio ya sea repentino o con tendencia, el modelo C es más eficiente que el modelo T para detectar el cambio. También se encontró que si se tiene un proceso con pequeños cambios repentinos con tendencias grandes, o cambios repentinos grandes con pequeñas tendencias en la media, el modelo C es más eficiente que el modelo T.

El modelo T es más eficiente que el modelo C para cambios repentinos grandes con tendencias. Lo anterior sugiere que si se aplica el modelo C en forma constante en un proceso para detectar cambios en la media, el modelo C tiene el potencial para detectar cambios en la media cuando estos sean incipientes y antes de que se tornen más críticos.

Por lo anterior, se concluye que el modelo combinado C es una buena estrategia para monitorear y controlar la media de un proceso normal.

## Referencias

1. Samuel, R. T. and Pignatiello, J. J., 1998, "Identifying the Time of a Step Change with X bar Control Charts", Quality Engineering, Vol. 10 No.3: 521-527.
2. Perry. P. M. and Pignatiello, J. J., 2004, "Estimating the Change Point of a Normal Process Mean with Linear Trend Disturbance in SPC". Proceedings of the 34th International Conference on Computers and Industrial Engineering. San Fco. California.
3. Wu, Z., 1994-1995, "An Enhanced X Chart for Detecting Mean Shift". Quality Engineering, Vol. 7 No. 2:345-356.
4. Hawkins M. D., Qiu, P. and Kang, C., 2003, "The Change Point Model For Statistical Process Control", Journal of Quality Technology, Vol. 35 No.4:355-366.
5. Hawkins M. D. and Zamba, D. K., 2003-2004, "On Small Shifts in Quality Control", Quality Engineering, Vol. 16 No. 1:143-149.
6. Sheu, S. H. and Lin, T. Ch., 2003-2004, "The Generally Weighted Moving Average Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean", Quality Engineering, Vol. 16 No. 2:209-231.

7. Page, E. S., 1954, "Continuous Inspection Schemes". Biometrika, Vol. 41:100-114.
8. Roberts, S. W., 1959, "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages". Technometrics. Vol. 1:239-250.
9. Chen, J. and Gupta, K.A, 2001, "Parametric Statistical Change Point Analysis" Boston: Birkhauser.
10. Taylor, W., 2000, "Change-Point Analysis: A Powerful New Tool for Detecting Changes" <http://www.variation.com/cpa/tech/changepoint.html>.

## Apéndice

Considerando  $\mu_0 = 0$  la función de  $\mu_i$  es;  $\mu_i = \beta_0 + \beta_1(i - \tau - 1)$

La función de máxima verosimilitud es

$$L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i) = \prod_{i=1}^{\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\bar{x}_i}{2\sigma^2}\right)} \prod_{i=\tau+1}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(\bar{x}_i - (\beta_0 + \beta_1(i - \tau - 1)))^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{\tau} e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \bar{x}_i^2}{2\sigma^2}\right)} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{(T-\tau)} e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} (\bar{x}_i - (\beta_0 + \beta_1(i - \tau - 1)))^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Obteniendo el logaritmo de la función de máxima verosimilitud se tiene

$$\log(L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i)) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \tau \log(\sigma\sqrt{2\pi}) \right) \left( \sum_{i=1}^{\tau} \bar{x}_i^2 \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \left( (T-\tau) \log(\sigma\sqrt{2\pi}) \right) \left( \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{x}_i - (\beta_0 + \beta_1(i - \tau - 1)))^2 \right)$$

Simplificando y eliminando constantes,

$$\log(L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i)) = -\left( \sum_{i=1}^{\tau} (\bar{x}_i)^2 + \sum_{i=\tau+1}^T (\bar{x}_i - (\beta_0 + \beta_1(i - \tau)))^2 \right)$$

Expandiendo la ecuación

$$\log(L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i)) =$$

$$\left( \sum_{i=1}^{\tau} \bar{x}_i^2 + \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i^2 - 2\beta_0 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i - 2\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i(i - \tau - 1) + \sum_{i=\tau+1}^T \beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i - \tau - 1) + \sum_{i=\tau+1}^T (\beta_1(i - \tau - 1))^2 \right)$$

Simplificando y eliminando algunos términos constantes

$$\log(L(\beta_0, \beta_1, \tau / \bar{x}_i)) = - \left( -2\beta_0 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i - 2\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i-\tau-1) + (T-\tau)\beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1) + \sum_{i=\tau+1}^T (\beta_1(i-\tau-1))^2 \right) \quad (1)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $\beta_0$ , simplificando y despejando se tiene

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i - \beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)}{(T-\tau)} \quad (2)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $\beta_1$ , simplificando y despejando, resulta

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i-\tau-1) - \beta_0 \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)}{\sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)^2} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i-\tau-1) - \frac{\sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)}{(T-\tau)}}{\sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1)^2 - \frac{\left( \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1) \right)^2}{(T-\tau)}} \quad (4)$$

El modelo para estimar el punto de cambio se expresa por la ecuación (5).

$$V_\tau = \left( 2\beta_0 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i + 2\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T \bar{x}_i (i-\tau-1) - (T-\tau)\beta_0^2 - 2\beta_0\beta_1 \sum_{i=\tau+1}^T (i-\tau-1) - \sum_{i=\tau+1}^T (\beta_1(i-\tau-1))^2 \right) \quad (5)$$

Para cada punto u observación  $\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq T-1$ , se calcula  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de acuerdo a las ecuaciones (2) y (4) respectivamente y se sustituyen estos valores en (5).